Exercice n°1 :

1) a- Calculer $\left(1-2\sqrt{3}i\right)^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$

c- Mettre les solutions sous formes exponentielles

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points :

A , B et M d'affixes respectives $i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

a- Montrer que $z_M - z_A = 2\sqrt{3}i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et déduire AM en fonction de θ

b- Déterminer θ pour que le triangle OAM soit isocèle en A

3) On désigne par B' le symétrique de B par rapport à $(O,\vec{u})$ et N le point tel que $OB'NM$ soit un parallélogramme

a- Déterminer les affixes des points B' et N

b- Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ ✓

Exercice n°2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points $A(i)$ et $B(-i)$

Soit f l'application du $\mathscr{P}\setminus\{B\}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{iz+1}{z+i}$

I) On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O

1) Soit $M(z) \in \mathscr{P}\setminus\{A,B\}$, $N(\bar{z})$ et $M'(z')$ l'image de M par f

a- Montrer que les points A , N et M' sont alignés

b- Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$

c- En déduire que $z' \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}\setminus\{A,B\}$

2) Soient $M_1 \in \mathscr{C}\setminus\{A,B\}$ et $M'_1 = f(M_1)$

Déduire des questions précédentes une constriction de M'_1

II) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): \left(\frac{iz+1}{z+i}\right)^3 = 1$

1) a- Montrer que si z est solution de (E) alors $M(z)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$

b- En déduire que si z est solution de (E) alors z est réel

2) Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

a- Montrer que $\frac{i\tan\alpha+1}{\tan\alpha+i} = e^{i\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$

b- En déduire les valeurs de α tels que $\tan\alpha$ soit une solution de (E)

Exercice n°3 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^5 = 1$

   b- Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points images A, B, C, D et E des solutions de (E)

2) On considère le polynôme $Q(z) = (1-z)^4 + (1-z)^3 + (1-z)^2 + (1-z) + 1$

   a- Vérifier que $zQ(z) = 1-(1-z)^5$

   b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$

   c- Déduire que $Q(z) = \left(z + e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1\right)\left(z + e^{i\frac{4\pi}{5}} - 1\right)\left(z + e^{-i\frac{4\pi}{5}} - 1\right)\left(z + e^{-i\frac{2\pi}{5}} - 1\right)$

3) Montrer que $AB \cdot AC \cdot AD \cdot AE = 5$

Exercice n°4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère le système $S : \begin{cases} |z| = |z-6| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ où z est un nombre complexe

1) Donner le module et un argument des trois complexes $a = \sqrt{3} + i$, $b = -2 + 2i$ et $c = 3 + 3i$
2) Parmi les complexes a, b et c, lesquels sont solutions de S
3) M étant le point d'affixe z et A le point d'affixe 6 . Traduire géométriquement le système S
4) Résoudre le système S par une méthode de votre choix

Exercice n°5 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 2

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ et on considère l'équation $(E): iz^2 - 2(i - \cos\theta)z - 2\cos\theta = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E} = \left\{M(z) \in \mathscr{P} / \arg\left(\frac{z-2}{z}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$

3) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respective $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{-i\theta}$

   a- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle

   b- Montrer que $\frac{z_1 - 2}{z_1} \in i\mathbb{R}_-$ et $\frac{z_2 - 2}{z_2} \in i\mathbb{R}_-$

   c- Déduire que lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$, chacun des points M_1 et M_2 décrit l'ensemble $\mathscr{E}$

   d- Lorsque $M_1 \neq M_2$, on désigne par G le centre de gravité du triangle AM_1M_2

   Déterminer l'ensemble des points G lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

   e- Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AM_1},\overrightarrow{AM_2}}\right) = -2\theta[2\pi]$ et déduire les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AM_1M_2 soit équilatéral

cice n°6 :

plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z)=\frac{(1-i)z}{2}+\frac{1+i}{z}$

On désigne par M le point d'affixe z et par M' le point d'affixe $f(z)$

1) a- Montrer que $f(z)$ est un réel $\Leftrightarrow$ $(z\bar{z}-2)[\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)]=0$

   b- Déduire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que $f(z)$ est réel

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}'$ des points M tels que M , M' et $N\left(\frac{(1-i)z}{2}\right)$ soient alignés

3) On pose dans cette question $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$

   a- Montrer que $f(z)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

   b- Déduire que si M est un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 alors M' appartient à l'ensemble d'équation cartésienne $2x^2+18y^2=9$

4) On considère dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $(E):z^2f(z)=(1+i)z+2i$

   a- Montrer que l'équation (E) est équivalente dans $\mathbb{C}^*$ à l'équation $(E'):z^3+2-2i=0$

   b- Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation (E') et donner les solutions sous forme exponentielle

   c- Vérifier que $(1+i)$ est une solution de (E') puis déduire les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice n°7 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A , B et J d'affixes respectives 1, -1 et $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) a- Déterminer les racines cubiques de j et $\bar{j}$

   b- Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{j\}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ on a $\frac{j+z}{j-z}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=ij\tan\frac{\theta}{2}$

   c- En déduire les solutions de l'équation $(E):(j+z)^6+(j^2-z^2)^3+(j-z)^6=0$

2) Soit f l'application du $\mathcal{P}\setminus\{B\}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\frac{-2z}{z+1}$

   a- Ecrire j et j' l'affixe de $J'=f(J)$ sous forme exponentielle

   b- Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, $z'+1=\frac{1-z}{1+z}$

   c- Montrer que pour tout point M distinct de B, $BM'=\frac{AM}{BM}$

   d- En déduire que lorsque M varie sur l'axe des ordonnées, M' varie sur un cercle à préciser

3) Soit Δ la droite d'équation $x=-1$

   a- Montrer que si $M'\in\Delta$ alors $\frac{1-z}{1+z}$ est un imaginaire

   b- En déduire que lorsque M' varie sur Δ, M varie sur un cercle à préciser

4) a- Montrer que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})\equiv\pi+(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})[2\pi]$

   c- En déduire l'ensemble des points M lorsque M' décrit la demi droite $[BJ)$ privée du point B

Exercice n°8 :

Pour tout réel $\theta \in]-\pi;\pi]$, on considère l'application f_θ définie par, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{e^{i\theta}\}$, $f_\theta(z)=\dfrac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}$

1) Vérifier que si $\theta \in \left\{-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\}$ alors f_θ est constante

2) On pose $\theta=0$

   a- Montrer que pour tous nombres complexes z et z' de $\mathbb{C}\setminus\{-1;1\}$, $f_0(z)=z' \Leftrightarrow z=-f_0(-z')$

   b- Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$, $f_0\left(e^{i\alpha}\right)=\dfrac{i}{\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

   c- Déterminer les racines carrées de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

   d- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):(1+z)^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$

3) On suppose que $\theta \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\}$ et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

   On désigne par A , B , M et M' les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$, $-e^{-i\theta}$, z et $z'=f_\theta(z)$

   a- Montrer que pour tout $M \neq A$ et $M \neq B$, $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right)=\theta+\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$

   b- Pour $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M lorsque M' décrit l'ensemble d'équation $\begin{cases} y=-x \\ x>0 \end{cases}$

Exercice n°9 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A et B les points d'affixes respectives i et $-i$. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1

Soit l'application f qui à tout point M d'affixe $z\neq 0$ associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z^2+1}{z}$ et on désigne par M'' le symétrique de M par rapport à $(O,\vec{u})$

1) a- Déterminer $f(A)$ et $f(B)$

   b- Montrer que si z est imaginaire pur alors z' est imaginaire

   c- On déduire l'image de la droite (AB) par f

2) a- Montrer que si $z=e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]-\pi,\pi]$ alors $z'=2\cos\alpha$

   b- En déduire que si M est un point de $\mathcal{C}$ alors M' décrit un segment que l'on précisera

   c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z'=2\cos\alpha$ (on donnera l'écriture exponentielle des solutions trouvées)

3) a- Vérifier que pour tout nombre complexe $z\neq 0$ on a $z'-z=\dfrac{1}{z}$

   b- En déduire que $MM'=\dfrac{1}{OM}$ et que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont colinéaires de même sens

   c- Montrer que si M est un point de $\mathcal{C}$ alors $OMM'M''$ est un losange

« Ce n'est pas que je suis si intelligent, c'est que je reste plus longtemps avec les problèmes. »

EXERCICE N°1 :

plan complexe rapporté à un R.O.N. $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A(- 1), B(- 2) et C(i).

A tout point M d'affixe $z \neq -1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{i(z+2)}{z+1}$.

1) Déterminer l'affixe du point C' image du point C.

2) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$E = \{M(z)$ tels que z' est réel$\}$; $F=\{M(z)$ tels que z' est imaginaire$\}$ et $G = \{M(z)$ tels que $|z'| = 1\}$

3)-a- Montrer que $z' - i = \frac{i}{z+1}$. En déduire que $CM'.AM = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{CM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ $(M \neq B)$.

-b- Déterminer l'ensemble (E) du plan sur lequel varie le point M' lorsque M varie sur le cercle $C_{(A,1)}$.

EXERCICE N°2:

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit z un nombre complexe différent de 1. On pose $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$ et on désigne par A(1), B(-1), M(z) et M'(z').

1)-a- Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$ et en déduire que $|z'| = 1$.

-b- Traduire géométriquement ce résultat pour M'(z').

2) Soit $r = \frac{z'+1}{z-1}$.

-a- Montrer que r est réel et que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

-b- Utiliser ce qui précède pour construire M' connaissant M.

EXERCICE N°3 :

Le plan P est muni d'un R.O.N.D.$(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par I et A les points d'affixes respectives 1et $a = \sqrt{3} + i$ et par (C) le cercle de centre O et de rayon 1

1)-a- Donner la forme trigonométrique de a.

-b- Construire le point A.

2) Soit B le point d'affixe $b = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$

-a- Vérifier que $b\bar{b} = 1$. En déduire que B appartient au cercle (C).

-b- Montrer que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

-c- Construire le point B dans le repère$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) Soit θ un argument de b. Montrer que $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

EXERCICE N°4 :

Soit $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$.

1) Ecrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique.

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information.

EXERCICE N°1:

On considère les deux nombres : $Z = (1+i)^{2n}$ et $U = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$ où n est un entier naturel .

1) Montrer que $U = 2\mathrm{Re}(Z)$

2)-a- Montrer que si $n = 4p$ alors $Z = 2^n$ et $U = 2^{n+1}$

-b- Montrer que si $n = 4p+1$ alors $Z = 2^n i$ et $U = 0$

-c- Montrer que si $n = 4p+2$ alors $Z = -2^n$ et $U = -2^{n+1}$

-d- Montrer que si $n = 4p+3$ alors $Z = -2^n i$ et $U = 0$

3) On suppose que $n = 4p$. Montrer que : $U = 2\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}(-1)^k$. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}(-1)^k = 2^n$

EXERCICE N°2 :

Le plan complexe rapporté à un R.O.N. $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A = 1+i$, $Z_B = \sqrt{3} - i$, $Z_C = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$ et $Z_D = 1 + i\sqrt{3}$.

1) Ecrire Z_A , Z_B et Z_D sous forme exponentielle.

2)-a- Vérifier que $Z_A . Z_C = 2Z_D$. En déduire la forme exponentielle de Z_C .

-b- Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{\pi}{12})$.

3) Montrer que le triangle OBD est isocèle en O. Montrer que le quadrilatère OBCD est un losange.

EXERCICE N°3 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit Z un nombre complexe.

On désigne par A, M, M_1, M_2 et M' les points d'affixes respectives 1, Z, Z^2, $2Z$ et $2Z - Z^2$

1) Dans cette question, on prend $Z = e^{i\frac{\pi}{6}}$

-a- Placer les points M, M_1 et M_2

-b- Montrer que le quadrilatère OM_1M_2M' est un parallélogramme. Placer alors le point M'

2) Dans cette question, on prend $Z = e^{i\theta}$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

-a- Donner la forme exponentielle de $Z - 1$. Montrer que MA = MM'.

-c- Prouver que $\frac{Z'-1}{Z}$ est réel.

-d- Pour un point M donné, expliquer(en utilisant les questions précédentes) comment construire M' .

EXERCICE N°4 :

Le plan complexe est rapporté à un R.O.N.D $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les points d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{8}}$

Soit f la fonction du plan P dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \sqrt{2}\,\overline{z} + iz$

$z = z(\sqrt{2} + i)$

1) Déterminer f(A).

2) Déterminer l'ensemble E des points invariants par f. Vérifier que E = (OA).

3) On suppose que le point M(z) n'appartient pas à (OA).

-a- Montrer que $\arg(z - z') = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ (On pourra écrire $z = re^{i\alpha}$).

-b- Que peut-on en déduire pour les droites (MM') et (OB) ?

-c- Montrer que le point I d'affixe $\frac{z+z'}{2}$ est invariant par f.

4) Donner une méthode de construction géométrique permettant d'obtenir l'image M' par f d'un point M de P

« *Sois toujours comme la mer qui, se brisant contre les rochers, trouve toujours la force de recommencer* »
[Jum Morrison]

EXERCICE N°1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit C le point d'affixe $Z_C = \sqrt{2} - i\sqrt{2} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

1)-a- Construire les points A et B d'affixes respectives $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

-b- Construire alors le point C.

2)-a- Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

-b- En déduire un argument de Z_C.

3) Soient I et J les points d'affixes respectives 1 et −1 et D le point d'affixe $Z_D = \dfrac{Z_C - 1}{\overline{Z_C} - 1}$

-a- Montrer que D appartient au cercle trigonométrique de centre O.

-b- Montrer que $\dfrac{Z_D + 1}{Z_C - 1}$ est réel. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

-c- Peut-on avoir J = D ?

-d- Construire alors le point D.

EXERCICE N°2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A ,M et N les points d'affixes respectives 1, $1+e^{i\theta}$ et $1+e^{-i\theta}$. Soit I le milieu de [MN].

1) Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2) Montrer que le triangle AMN est isocèle.

3) Déterminer θ pour que l'aire $A(\theta)$ du triangle AMN soit maximale.

EXERCICE N°3:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives $Z' = i + e^{i\theta}$ et $Z'' = i - e^{-i\theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

1)-a- Déterminer la forme exponentielle de Z' et Z''.

-b- Déterminer θ pour que le triangle OM'M'' soit rectangle en O.

2) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M' lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Montrer que M'' est l'image de M' par une symétrie orthogonale que l'on précisera.

4) En déduire l'ensemble (E') des points M'' lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Construire (E').

EXERCICE N°4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points M, M' et N d'affixes respectives $2e^{i\theta}$, $2(i-1)\,e^{i\theta}$ et $2ie^{i\theta}$.

1) Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2) Montrer que le triangle OMN est isocèle et rectangle.

3) Montrer que OMNM' est un parallélogramme.

4) En déduire une construction du point M' à partir du point M.

« En essayant continuellement on finit par réussir. Donc : plus ça rate, plus on a de chance que ça marche. »

EXERCICE N°1 :

Répondre par vrai ou faux (avec **justification**)

1) Si $e^{-i\alpha}$ est une solution de l'équation : $z^2-(1+2\cos\alpha)z+(1+e^{-i\alpha})=0$ alors l'autre racine est $1+e^{i\alpha}$.

2) $2ie^{-i\frac{\pi}{12}}$ est une racine cubique de $-4\sqrt{2}(1+i)$.

EXERCICE N°2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1)-a- Résoudre dans £ l'équation (E) : $Z^3=i$.

-b- On désigne par A, B et C les images des solutions de (E). Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

2)-a- Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$. Montrer que $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}=-i\tan(\dfrac{\theta}{2})$

-b- Déterminer en fonction de θ le nombre complexe z tel que $\dfrac{-z+i}{z+i}=e^{i\theta}$.

-c- Résoudre dans £ l'équation (E') : $\left(\dfrac{-z+i}{z+i}\right)^3=i$.

-d- Développer puis résoudre l'équation : $(-z+i)^3=i(z+i)^3$, puis déduire la valeur exacte de $\tan(\dfrac{\pi}{12})$.

EXERCICE N°3:

1) Montrer que $i+e^{i\alpha}=2\cos(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4})e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ avec $\alpha\in$ ¡ .

2) Soit (E) : $z^2-(2i+e^{i\alpha})z+ie^{i\alpha}-1=0$ avec $\alpha\in\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

-a- Résoudre dans £ l'équation (E).

-b- Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.

3) On considère les points A(i) et B($i+e^{i\alpha}$) et I= A∗B. Déterminer et construire l'ensemble des points I.

4) On suppose que $\alpha=0$.

-a- Résoudre dans £ les équations $z^n=i$ et $z^n=1+i$.

-b- En déduire les solutions dans £ de l'équation $\left(z^n-i-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

EXERCICE N°4 :

Soit θ un réel de $[0,\pi]$.

1)-a- Vérifier que $(e^{i\theta}-i)^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$.

-b- Résoudre dans £ l'équation (E) : $z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$.

2) On désigne par $M_1(e^{i\theta})$ et $M_2(2i-e^{i\theta})$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.

-a- Construire l'ensemble E_1 décrit par M_1 lorsque θ varie dans $[0,\pi]$.

-b- Donner l'affixe z_1 du milieu de $[M_1M_2]$. Déduire l'ensemble E_2 décrit par M_2.

3)-a- Montrer que $M_1M_2^2=8(1-\sin\theta)$.

-b- Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 soit maximale.

« *La confiance en soi est le premier secret du succès.* » *[Ralph Waldo Emerson]*

EXERCICE N°1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^4 : 16$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $(Z-i)^3 = 4(Z+i)$

-a- Vérifier que $Z_0 = i$ est une solution de (E').

-b- Montrer que si Z est une solution de (E') distincte de Z_0 alors $|Z-i|^2 = 4$.

-c- En déduire que si Z est une solution de (E') distincte de Z_0 alors $Z - i$ est une solution de (E).

-d- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

EXERCICE N°2 :

Le plan complexe est rapporté à un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit $\theta \in [0,\pi]$.

1) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2(1+3e^{i\theta})z - 3 + 10e^{i\theta} + 8e^{i2\theta} = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

2) On désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_1 = 3 + 2e^{i\theta}$ et $z_2 = -1 + 4e^{i\theta}$.

-a- Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie.

-b- Peut-on avoir M = N ?

-c- Déterminer θ pour que O soit un point du cercle de diamètre $[MN]$.

EXERCICE N°3:

Le plan complexe P est muni d'un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. Pour tout réel $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

(E) : $z^3 - (3 + 2i\sin(2\theta))z^2 + (2 + 4i\sin(2\theta))z - 2i\sin(2\theta) = 0$.

1)-a- Vérifier que 1 est une racine de (E).

-b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On considère dans P les points A, M et N d'affixes respectives $z_0 = 1$, $z_1 = 1 + e^{2i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{-2i\theta}$.

Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

4) Montrer que le triangle AMN est isocèle en A. Déterminer θ pour que le triangle AMN soit équilatéral.

EXERCICE N°4 :

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $Z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)Z^2 + 4(1 - \sqrt{2})Z - 8 = 0$.

1)-a- Montrer que $Z_0 = 2$ est une solution de (E).

-b- En déduire les autres racines Z_1 et Z_2 de (E) ; Z_2 ayant une partie imaginaire positive.

-c- Vérifier que $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2}$.

-d- Mettre Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle.

2) Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives Z_0, Z_1 et Z_2.

3) Soit I le milieu du segment $[AB]$.

-a- Montrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

-b- En utilisant l'affixe de I, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

4) Soit θ un réel et $(E_\theta) : Z^3 + 2e^{i\theta}(\sqrt{2} - 1)Z^2 + 4e^{i2\theta}(1 - \sqrt{2})Z - 8e^{i3\theta} = 0$.

-a- Montrer que Z est une solution de (E) si et seulement si $e^{i\theta}Z$ est une solution de (E_θ).

-b- En déduire les solutions de $(E_{\frac{\pi}{4}})$ sous forme algébrique puis exponentielle

Ex I: le plan est rapporté à un R.O.N

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(O,1)$; $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(O,3)$

$M(z) \neq O$ $\quad M'\left(z' = \frac{iz}{|z|}(2-|z|)\right)$

1) M.q $\triangle_{OMM'}$ rectangle en O.

2) $z \neq 0$ $\quad z = re^{i\alpha}$

m.q $\quad z' = (2-r)e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$

3) $M \in \mathcal{C}' - \{B(3i) ; B'(-3i)\}$

a) M.q $M' \in \mathcal{C}$, déd. par une

Construction de M' Connaissant $M \in \mathcal{C}'$

Ex II: $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$. $z = e^{2i\theta} - i$

1) $\bar{z}$? 2) $z+\bar{z}$ 3) $O(0)$, $M(z)$, $M'(\bar{z})$

dom $N/(OMNM')$ # en losange.

4) V. $z = 2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})e^{i(\theta-\pi/4)}$

5) θ ? $(OMNM')$ Carré.

Ex III*. $Z = \dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ $\quad |z_1| = |z_2| \neq 0$

• m.q $Z \in \mathbb{R}$.

Ex V: $A(1)$: $B(m+i)$: $C(m-i)$

. dom m / $\triangle_{ABC}$ équilatéral direct

. " " / $\triangle_{ABC}$ isocèle rectangle droit en A.

0c V13

Ex VI:

$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M(z) \mapsto M'\left(z' = \frac{z+1}{z-1}\right)$

1) $A(-1)$, $B(1)$

m.q. $(\vec{u}, \overrightarrow{BM})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'})$

Sont opposés et $[BA)$ bissectrice de $[\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}]$

2) m.q. z' im pur $\Leftrightarrow |z| = 1$ 3) Construire M' Connaissant

M dans $\mathcal{C}(0,1) - \{B\}$.

Ex VII $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (E_θ): $z^2(\cos\theta) - 2iz - 2e^{i\theta} = 0$

1) Résoudre E_θ 2) $M_1\left(z_1 = \frac{i-e^{i\theta}}{\cos\theta}\right)$, $M_2\left(z_2 = \frac{i+e^{i\theta}}{\cos\theta}\right)$

m.q. $\triangle_{(OM_1M_2)}$ rectangle en $O(0)$

3) $N(z_1+z_2)$ m.q (OM_1NM_2) Rectangle.

4) θ ? $M_2 = r(O,-\pi/2)(M_1)$

5) θ ? l'aire de $(OMNM_2)$ égale à 4

Ex VIII* (E): $z^2 = (1+i\sqrt{3})\bar{z}$ $\quad z \neq 0$

1) $z = re^{i\theta}$; z^2 ? $\bar{z}$? $(1+i\sqrt{3})\bar{z}$? s.f. exp

2) Résoudre (E). $\{z_0, z_1, z_2\}$ $A(z_1 - z_0)$, $B(z_2 - z_0)$

z_A, z_B s.f. exp z_B / z_A; Nature $\triangle_{OAB}$.

Série ② Tp v 17

Ex I : $A(2i)$, $B(-i)$, $M(z)$

1) donne l'ensemble des pts $M(z)$ /

a) $|z-2i| = |z+i|$

b) $|z+i| = |\bar{z}+2|$

2) on question a) $N = z(\bar{z}-1)$ réel

b) N imaginaire / $\mathrm{Im}(N) > 0$

Ex II : donne l'ensemble des pts $M(z)$ /

a) $A(1)$, $M(z)$, $N(1+z^2)$ alignés

b) $A(i)$, $M(z)$, $N(iz)$ soient les Sommets d'un triangle équilatéral.

Ex III : donne l'ensemble des pts $M(z)$ /

a) $(z-2i)(\bar{z}-1)$ est un imaginaire pur

b) $(z-2i)(\bar{z}-1)$ est un réel.

Ex IV : * $z \neq 0$

1) M.q $\dfrac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$ ou $2z\bar{z} = z+\bar{z}$

2) $M(z)$ /

déduire l'ensemble des pts $M(z)$ / $\dfrac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R}$.

Ex V : $z \notin \mathbb{R}$

$M(z)$, $N(z^2)$, $P(z^3)$

1) m.q M, N, P ne sont pas alignés.

2) Mq Δ_{MNP} isocèle en $M \Leftrightarrow |z+1| = 1$

déduire l'ensemble des pts $M(z)$ / Δ_{MNP} isocèle en M

3) Mq Δ_{MNP} rect en $M \Leftrightarrow (1+z) + \overline{(1+z)} = 0$

déd M ? / Δ_{MNP} rect et isocèle en M

Ex VI : (Bac Tu) : $A(1)$, $B(-1)$, $M(z)$, $M'(z')$ /

$z' = \dfrac{z(\bar{z}-1)}{z-1}$ 1) $C(i)$ donne z' / $z = z_C = i$

2) donne l'ensemble des pts $M(z)$ / $z' = -1$ 3) m.q / $z' = z$

4) $M \notin (AB)$ et $M \notin \mathcal{C}(O,1)$; $M_1 = S_{(AB)}(M)$

donne z_1 en fonction de z ?

5) Mq $\dfrac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \dfrac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}$ et $\overrightarrow{M_1M'} \perp \overrightarrow{AM_1}$

6) Mq $\overrightarrow{M_1M'} \perp \overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M'} \perp \overrightarrow{BM'}$, Construire M' [illegible] M

Prof. ... S : Révision I

Ex I : $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O,1)$ $I(1)$, $A(a = \sqrt{3}+i)$

1) donner la f. exp de a, construire A.

2) $B\left(b = \frac{a-1}{1-\bar{a}}\right)$ a) Mq. $b\bar{b} = 1$, $B \in \mathcal{C}$

b) Mq. $\frac{b-1}{a-1} \in \mathbb{R}$, cq. A, B, I alignés

• Construire B.

Ex II : $f : P - \{(O,\vec{x})\} \to P$

$M(z) \mapsto M'\left(z' = \frac{z^2}{z-\bar{z}}\right)$

1) Inv f 2) Mq. la droite (MM') garde une direction fixe. 3) Δ la parallèle à $(O,\vec{j})$ passant par M cq $M' \in$ M et $(OM) \cap \Delta$.

4) $D : y = 2$ cq si $M \in D$, $M' \in P$

P une parabole fixe que l'on précisera.

Ex III : $f : P \to P$ $M(z) \mapsto M'\left(z' = \frac{z+1}{z-1}\right)$

$A(-1)$, $B(1)$ 1) $M(z)$ Mq. $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{BM}})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'})$ sont opposés en $[BA)$ bissectrice de $[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$ 2) Mq z' im pur $\Leftrightarrow |z| = 1$

• Construire M' connaissant $M \in \mathcal{C}(O,1) \setminus \{B\}$

//

Ex IV : $A(-1)$; $B(i\sqrt{3})$, $M(-1+e^{i\theta})$

1) Mq $M \in \mathcal{C}(A,R)$ R ? 2) θ ? / (BM) tangente à $\mathcal{C}$.

Ex V : $A(1)$; $B(m+i)$; $C(1+im)$

• m ? / (ABC) équilatéral

• m ? / (ABC) rectangle isocèle en A.

Ex VI : $\theta \in [0, \pi/4[$ $z = e^{2i\theta} - i$ 1) $\bar{z}$?

2) $z + \bar{z}$? 3) $O(0)$, $M(z)$, $M'(\bar{z})$

N ? / (OMNM') # puis losange. 4) Mq $z = 2\sin(\ldots)e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$

θ ? / (OMNM') carré.

Ex VII : Une urne contient 4 jetons indiscernables portant 2, -1, $2i$, $-i$ $(i^2 = -1)$. On tire successivement avec remise deux jetons

a = somme des nbs apparus ; $f : P \to P$ $M(z) \mapsto M'(z')$ / $z' = az + \bar{a}$ / dans la probabilité.

A « f une translation » B « f une rotation »

C « f similitude directe $k = \sqrt{5}$ »

2) X associé au $|a|$; loi de X.

$\boxed{a, b, c \ldots \to z'' = \bar{z}}$ $\Delta = -a\bar{a} = (i|a|)^2$

$|\bar{z} - 1| = |z + 1|$

Ex VIII: $u \in \mathbb{C}$

$z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu\bar{u} = 0$

1) Résoudre (E)

2) $A(2i)$; $M(u)$; $M'(z')$, $M''(z'')$

H : l'ensemble des pts M / A, M', M'' alignés. H?

Ex IX: $n \in \mathbb{N}^*$

(E): $(z-i)^n = (z+i)^n$

1) z sol $\rightarrow |z-i| = |z+i|$ $\rightarrow z \in \mathbb{R}$

2) $z = ?$

Ex X: $z^2 = (1+i\sqrt{3})\bar{z}$ $\quad z \neq 0$

1) Résoudre par la méthode exp.

2) $\{z_0; z_1; z_2\}$

$A(z_1 - z_0)$; $B(z_2 - z_0)$

• Mettre z_A, z_B s.f. exp

∴ Δ_{OAB} équilatéral

Ex VI: dans l'ens des pts $M(z)$ /

• $\operatorname{Arg}(z - i\bar{z} + 1) \equiv \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

Ex XII: (E_α): $z^2 - 2e^{i\alpha}\cos(2\alpha)z + e^{2i\alpha} = 0$

$\alpha \in (0, \pi/2)$. 1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ Résoudre (E)

2) V. $z_1 = \bar{e}^{i\alpha}$ solut ; z_2?

3) α / (OABC) losange. $A(e^{-i\alpha})$; $B(3$; $C(e^{3i\alpha})$

Ex XIII: E_θ: $z^3 - 2e^{i\theta}(\sqrt{3}+i)z^2 + 4e^{2i\theta}(1+i\sqrt{3})z - 8ie^{3i\theta} = 0$

(E): $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1) V. les solut de (E) $z_0\, z_1 z_2 = 8i$ [illegible]

2) z_0 imp? Résoudre (E)

3) V. $z\,\bar{e}^{i\theta}$ solut de (E) $\Leftrightarrow$ z solut de E_θ.

Résoudre (E_θ)

Ex XVII $f: P \to P$ $M(z) \mapsto M'(z' = z + z^2)$

1) Inf. 2) les antécédents de $C(-1+i)$; 3) M? / $M' \in x'ox$

4) $a \in \mathbb{R}^*$ $\Omega(ia)$; $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, O\Omega)$

$M \in \mathcal{C} \rightarrow (MM')$ tangente à $\mathcal{C}$, construire M' / $M \in x = -1/2$

Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°4**	$4^{ème}$ Math

6129

Exercice 1 On considère l'équation $(E_\theta): 16\left(\tan^2\theta\right)Z^2 - 4(1+2i\tan\theta)Z - (\tan\theta - i)^2 = 0$ où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_{\frac{\pi}{4}}$.

2) a) Montrer que l'équation (E_θ) admet dans $\mathbb{C}$ une seule solution réelle que l'on déterminera.

b) Déterminer l'autre racine z_1 en fonction de θ.

c) Mettre $W = (\tan\theta - i)$ sous forme exponentielle. En déduire z_1 sous forme exponentielle.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $M\left(\frac{1}{4\sin^2\theta}e^{i2\theta}\right)$ et $N(2i\cos\theta)$. Soit M' le symétrique de M par rapport à la droite $(O, \vec{v})$.

a) Déterminer θ pour laquelle, les points O, M et N soient alignés.

b) Déterminer θ pour laquelle, le quadrilatère OMNM' soit un losange.

Exercice 2 Le plan complexe P est rapprté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point A d'affixe 1 et l'application $f: P \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = 2z - z^2.$$

1) Déterminer les points invariants par f.

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z^2 et $2z$.

a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que les points O, M_1 et M_2 soient alignés.

b) On suppose que M n'appartient pas à l'axe des abscisses.

Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.

3) On suppose que M appartient au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

a) Montrer que $AM = MM'$ et que $\frac{z'-1}{z}$ est réel.

b) En déduire que A et M' sont symétriques par rapport à la tangente Δ à Γ en M.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, léquation $(E)\ 2z - z^2 = 1 + e^{i2\theta}$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) tel que $\text{Im}(z_1) \succ 0$).

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Montrer que $N_1(z_1)$ et $N_2(z_2)$ sont symétriques par rapport à un point fixe à préciser.

d) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points N_1 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire l'ensemble E_2 des points N_2 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): Z^2 - 2(1+\cos 2\theta)Z + 2(1+\cos 2\theta) = 0$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. Résoudre l'équation (E).

b. Donner l'écriture exponentielle de chacune des solutions.

613

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On désigne par A et B les points images des solutions de (E) et par C le point d'affixe 2.
Déterminer θ tel que OACB soit un losange.

Exercice 4 Le plan complexe P est rapprté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point $M(z)$ et le point $M'(z')$ tel que $z' = z^2 + iz$.
1) Déterminer l'ensemble des points M tels que M et M' sont confondus.
2) Soit $A\left(-\frac{i}{2}\right)$. Soit $N_1(z_1)$ et $N_2(z_2)$ deux points du plan.
Montrer que $z_2' = z_1'$ si et seulement si $N_2 = N_1$ ou $N_2 = S_A(N_1)$.
3) a) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z) \text{ tel que } z' \in \mathbb{R}\}$.
b) Tracer la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + \frac{1}{4}$ et la droite $D : y = x$.
c) Trouver, à l'aide de $\mathscr{P}$ et D, une construction du point M' lorsque le point M appartient à la droite $(A, \vec{u})$.

Exercice 5
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considère les points $A(2)$ et $B(3)$.
Soit Z un nombre complexe différent de 2 et $Z' = \frac{\overline{Z}-3}{\overline{Z}-2}$. On désigne par M et M' les points d'affixes respectives Z et Z'.
1. a. Vérifier que $Z' - 1 = \frac{-1}{\overline{Z}-2}$.
b. En déduire que $IM' \times AM = 1$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM'}) = \pi[2\pi]$.
2. Construire le point M' lorsque M est un point du cercle $\mathscr{C}_1$ de centre A et de rayon 1.
3. Dans cette question, le point M appartient au cercle $\mathscr{C}_2$ de centre B et de rayon 1.
a. Montrer qu'il existe un réel θ de $]-\pi, \pi[$ tel que $Z = 3 + e^{i\theta}$.
b. Ecrire $Z' - 1$ sous forme exponentielle.
c. Montrer que M' appartient à la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$.
d. Construire alors le point M'.

Exercice 6
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^6 + i = 0$.
2. a. On pose $f(Z) = Z^6 + i$. Ecrire $f(Z)$ en produit de facteurs de 1^er degré.
b. Justifier que $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ pour tout réel α.
c. En exprimant $f(1)$ de deux façons, montrer que
$$\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{15\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{19\pi}{24}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{64}.$$
3. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^6 = -i(2-Z)^6$.
a. Montrer que si Z est solution de (E) alors $|Z| = |2-Z|$ et que $Z = 1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$.
b. Montrer que si Z est une solution de (E) alors $\arg(Z) + \arg(2-Z) = 0[2\pi]$.
c. Si on pose $\arg(Z) = \theta[2\pi]$, montrer que $12\theta = \frac{-\pi}{2}[2\pi]$.
d. En déduire une construction des images des solutions de (E), et donner ces solutions.

Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°3**	$4^{ème}$ Math

6037

Exercice1

1) Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(2+2i)z+2i(1+\tan^2\theta)=0$.

2) Déterminer en fonction de θ la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation.

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2-4z+5)+i(z+1)=0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0$.

3) En déduire qu'il existe des réels a, b, c et d à déterminer, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=(z^2+az+b)(z^2+cz+d)$.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): iz^2+(2-mi)z-(m+i)=0$ où m est un nombre complexe non nul et z l'inconnu.

1) a) Résoudre l'équation (E), on notera z_1 la solution indépendante de m et z_2 l'autre racine.

b) Soit A le point d'affixe 1, M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2.

Trouver la valeur de m pour laquelle $\begin{cases} AM_2 = 2AM_1 \\ (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ m̄ arg et m̄ module ⇒ m̄ nombre complexe.

2) Pour $m=-2+i$, résoudre l'équation $(F): iz^6+(2-mi)z^3-(m+i)=0$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I/ 1. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ tel que $1+Z^2$ est réel.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}$,

$1+Z^2$ est imaginaire, si et seulement si, $M(Z) \in C_f$ ou $M(Z) \in S_{(O,\vec{u})}(C_f)$.

II/ Pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on désigne par M, N et P les points d'affixes respectives Z, Z^3 et Z^5.

1. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ tels que M, N et P soient alignés.

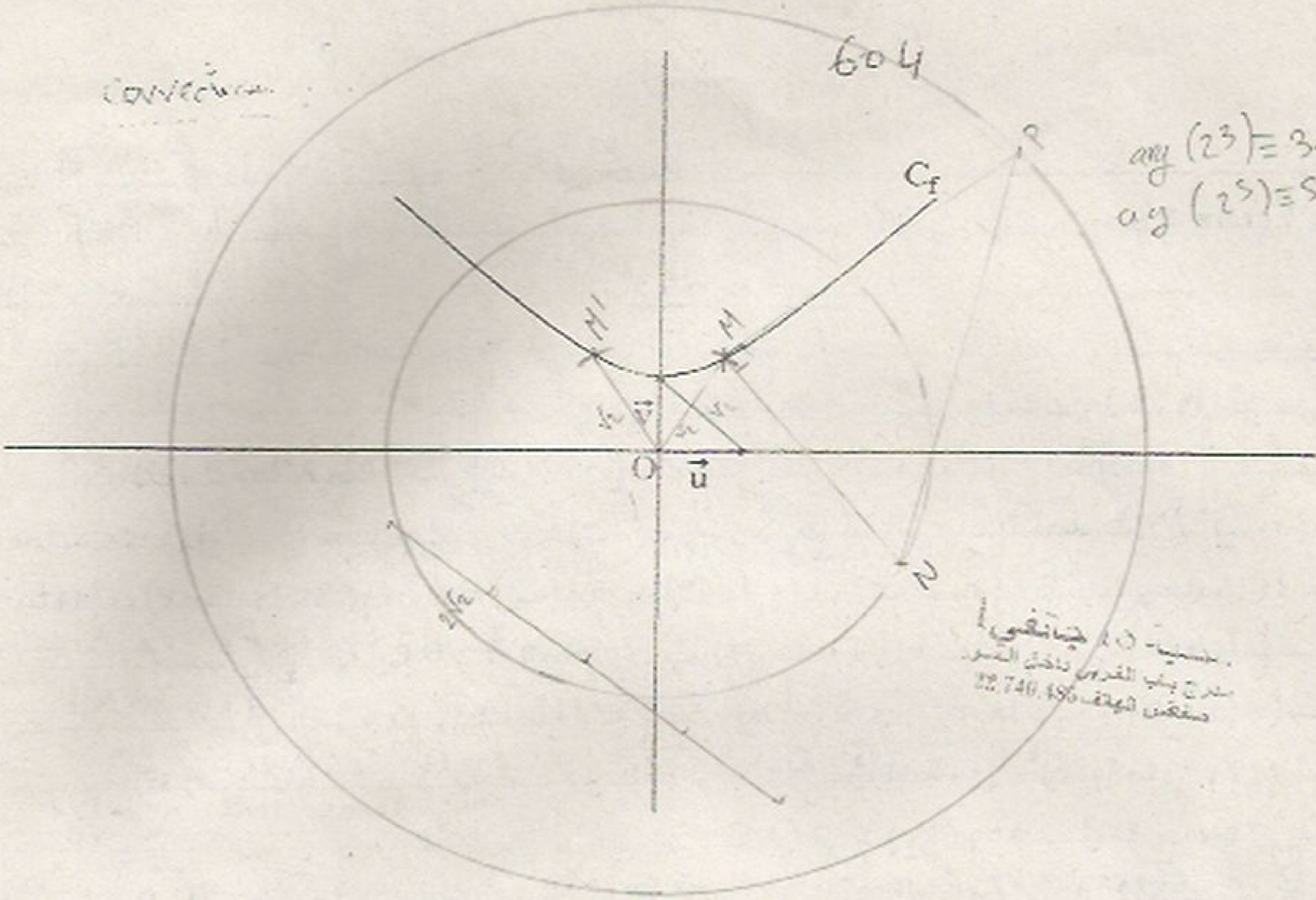
2. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ tels que MNP soit un triangle rectangle en M.

3. Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe C_f de f.

Construire trois points $M(Z)$, $N(Z^3)$ et $P(Z^5)$ tels que $\begin{cases} |Z| = \sqrt{2} \text{ et} \\ \text{le triangle MNP est rectangle en M} \end{cases}$

Correction

604



$arg(z^3) = 3\alpha[2\pi]$
$arg(z^5) = 5\alpha[2\pi]$

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^5 = 1$.

2. Soit $U = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $\alpha = U + U^4$.

   a. Montrer que $\alpha = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

   b. Vérifier que $Z^5 - 1 = (Z-1)(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)$

   c. Montrer que α est une solution de l'équation $(E') : X^2 + X - 1 = 0$.

   d. Résoudre (E') et en déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\| = 2cm$.

   a. Placer le point A d'affixe $2 + i$ et le point H d'affixe $\frac{OA - 1}{4}$.

   b. Construire alors le point A' d'affixe U.

   c. Construire un pentagone régulier ABCDE inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$.

Série : Nombres complexes 1

Vrai / Faux :

1) L'ensemble des points M d'affixes z telle que $|z-i| = |z+2i|$ est une droite parallèle à l'axe des réelles.
2) Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{2}$ alors $|z+i| = |z|+1$
3) Soit $Z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$ où z est un nombre complexe différent de 1. On a $|Z'| = 1$
4) $(\sqrt{3}+i)^7 - (\sqrt{3}-i)^7$ est un réel

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectifs $Z_A = \sqrt{3}+i$ et $Z_B = -1+i\sqrt{3}$.

1) a) Ecrire sous forme exponentielle Z_A et Z_B.
b) Déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

2) a) Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère OACB soit un carré.
b) Déterminer la forme exponentielle Z_C

3) Soit un point M d'affixe $Z_M = 1+e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$
a) Déterminer la forme exponentielle de Z_M.
b) Déterminer la valeur de θ pour que M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
c) Déterminer la valeur de θ pour que les points O, A et M soient alignés.

Exercice 2 :

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j})$.
A, B et C sont les points d'affixes respectives i ; $-i$ et $-3i$.
A tout point d'affixe $z(z \neq -3i)$ on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{3iz-1}{z+3i}$.

1/ Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels $M' = M$.

2/ Montrer que pour $z \neq i$ et $z \neq -3i$ on a : $\frac{z'+i}{z'-i} = 2.\frac{z+i}{z-i}$.

3/ soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M tels que $\frac{MB}{MA} = \frac{1}{2}$.

a) Déterminer et construire $\mathcal{E}$.

Vérifier que C appartient à $\mathcal{E}$.

b) Montrer, en utilisant 2/ que si M appartient à $E \setminus \{C\}$ alors M' appartient à une droite fixe.

Exercice 3 :

Dans le plan complexe, on considère les points $A(i)$, $B(-i)$.
A tout point M distinct de B d'affixe z on associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = \frac{1-z}{1-iz}$

1) a) Déterminer l'ensemble des points M tels que Z' soit réel.
b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|Z'| = 1$.

2) a) Montrer que pour tout $Z \in C \setminus \{-i\}$, $Z' + i = \frac{-1+i}{Z+i}$.
b) En déduire que $BM.BM' = \sqrt{2}$
c) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 4:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$ et par C le cercle de centre A et de rayon 1.

Soient F le point d'affixe $z_F = 2$, B le point d'affixe $z_B = 1+e^{i\frac{\pi}{3}}$, E le point d'affixe $z_E = 1+{z_B}^2$ et C le point tel que OABC soit un parallélogramme.

1) a/ Justifier que $B \in C$.
b/ Déterminer la forme exponentielle de z_C.
c/ En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
d/ Placer alors le point B.

2) a/ Déterminer la forme exponentielle de z_B puis celle de $z_{\overrightarrow{AB}}$.
b/ En déduire que les points A, B et E sont alignés.

3) Pour tout nombre complexe z différent de 2, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' tels que $z' = \frac{2z-3-i\sqrt{3}}{2iz-4i}$

a/ Vérifier que $z' = \frac{z-z_B}{i(z-z_F)}$

b/ Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$

c/ Déterminer l'ensemble des points M tels que $z' \in IR$.

4) a/ Vérifier que $z' + i = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{i(z-2)}$

b/ Montrer que si M appartient au cercle de centre F et de rayon1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 5 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points , B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -i$ et $z_C = \sqrt{3}$

A tout point M du plan d'affixe $z \neq -i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-\sqrt{3}}{1-iz}$

1) a/ Vérifier que $-iz' = \frac{z-\sqrt{3}}{z+i}$

b/ Déduire l'ensemble des points M tels que z' soit un réel.

2) a/ Montrer que $|z'| = \frac{CM}{BM}$

b/ Déduire l'ensemble des points M lorsque M' varie sue le cercle trigonométrique de centre O.

3) Soit le nombre complexe $W = \frac{z'-i}{z-i}$; $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i, i\}$

a/ Vérifier que $(z-i)(1-iz) = -i(z^2+1)$

b/ Déduire que $W = \frac{-z_A}{z^2+1}$

4) On pose $z = e^{i\theta}$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

a/ Montrer que $W = \frac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} \cdot z_A$

b/ Donner la forme exponentielle de z_A.

c/ Déduire en fonction de θ le module et un argument de W.

2015 S1

LYCEE 15 NOVEMBRE 1955
SFAX

Prof : M^{me} TRIKI JOUDA
Classe : $4^{ème}$ M

SERIE N4

241g

Exercice 1

1) Déterminer le module et un argument $\alpha \in [0, 2\pi[$ de chacune des racines cubiques du nombre complexe : $u = 4\sqrt{2}(-1+i)$

2) Soit $\theta \in]0;2\pi[$. Ecrire le nombre complexe $\dfrac{1}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$ sous forme algébrique .

3)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}.(-1+i).z^3$ en utilisant les questions précédentes .

Exercice 2

1)Soit θ un réel différent de $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $\dfrac{z+i}{z-i} = e^{i\theta}$ équivaut à $z = \cot\dfrac{\theta}{2}$.

2)Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.
Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n = (z+i)^{2n}$.

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 + 1 = 0$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2) En déduire que pour tout nombre complexe z , on a :

$$z^5 + 1 = (z+1)(z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{5} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{3\pi}{5} + 1).$$

3) En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$ et celle de $\cos\frac{3\pi}{5}$.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et 2.

1) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M , d' affixe z , du plan tels que $|z-2| = |z-1|$.

2) Soit θ un réel différent de $2k\pi$, où k est entier.

Montrer : $\dfrac{z-2}{z-1} = e^{i\theta}$ équivaut à $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} i \cot(\dfrac{\theta}{2})$.

3) Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

Δ et Γ se coupent en un point Ω. Construire Ω et déterminer son affixe.

4) Soit n un entier naturel non nul. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

l'équation (E) : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = i$.

a) Soit M le point image dans le plan d'une solution z de l'équation (E).

Montrer que M appartient à Δ et $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2k\pi}{n}$, où k est entier.

b) Pour n = 3 , résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et construire dans le plan les points images des solutions de (E).

Exercice 5

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes , on considère l'équation (E_m) : $\overline{m} z^3 - 3mz - m^2 = 0$:
où m est un nombre complexe donné de module 2.

a) Vérifier que m est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_m).

b) Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

2) En deduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E')
$(1-i\sqrt{3})z^6 - 3(1-i\sqrt{3})z^2 + 2(1-i\sqrt{3}) = 0$

On donnera les solutions sous forme exponentielle.

LYCEE 15 NOVEMBRE 1955
SFAX

Prof : Mme TRIKI JOUDA
Classe : 4ème M

SERIE N5 242

Exercice 1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe $\frac{21}{10}$.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

(E) : $4z^4 - 10z^3 + 21z^2 - 10z + 4 = 0$.

Soit α un nombre complexe non nul et M, N, P et Q les points d'affixes respectives α, $\frac{2}{5}\alpha^2$, $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{2}{5\alpha^2}$.

1) Dans cette question, on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle puis l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{2}{5}\alpha^2$ et $\frac{2}{5\alpha^2}$.

b) Montrer que $\overline{MN} + \overline{PQ} = \overline{AO}$.

2) Montrer que $\overline{MN} + \overline{PQ} = \overline{AO}$ si et seulement si α est solution de (E).

3) a) Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont des solutions de (E).

b) En déduire les affixes des points M tels que $\overline{MN} + \overline{PQ} = \overline{AO}$.

Exercice 2

On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)z - 1 = 0$; θ étant un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

On pose $u_1 = (z_1 + 1)(\cos\theta - i\sin\theta)$ et $u_2 = (z_2 + 1)(\cos\theta - i\sin\theta)$.

1) Calculer $u_1 + u_2$ et $u_1 . u_2$, en déduire que u_1 et u_2 sont les racines de l'équation :

(E') : $u^2 - 4\cos\theta . u + 2 = 0$; (u étant l'inconnue).

2) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles u_1 et u_2 sont réels puis les valeurs de θ pour lesquelles u_1 et u_2 ne sont pas réels.

3) Quand u_1 et u_2 sont réels, montrer que les nombres complexes $(z_1 + 1)$ et $(z_2 + 1)$ ont même argument qu'on déterminera. Indiquer alors une propriété géométrique, dans le plan complexe, des points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives -1, z_1 et z_2.

4) Quand u_1 et u_2 ne sont pas réels, montrer que les nombres complexes $(z_1 + 1)$ et $(z_2 + 1)$ ont même module. Indiquer alors une propriété géométrique des points A, M_1 et M_2.

Exercice 3

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon R (R>0) et A le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe R.

Soit r la rotation de centre O et d'angle dont une mesure est $\frac{2\pi}{n}$; (où $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$).

On considère la suite des points $(M_k)_{k\geq 0}$ de $(\mathcal{C})$ définis par la relation de récurrence :
$M_{k+1} = r(M_k)$ et $M_0 = A$. On note z_k l'affixe de M_k et z_{k+1} l'affixe de M_{k+1}.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel k, $z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k$.

b) En déduire que pour tout entier naturel k, $z_k = R e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
Que peut-on dire des points M_n et M_0.

2) Prouver que pour tout entier $k \geq 0$, on a : $M_kM_{k+1} = 2R.\sin\frac{\pi}{n}$

3) Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots\ldots + M_{n-1}M_n$.
Déterminer la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°5	Prof M.Ben Ali
	4eme Math	

Exercice – 1 – :

Soit Z un nombre complexe different de 1 et θ un réel différent de $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

1)Montrer que : $\frac{1+Z}{1-Z} = e^{i\theta}$ si et seulement si $Z = i\tan(\frac{\theta}{2})$.

2)Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\frac{1+Z}{1-Z})^3 = i$.

Exercice – 2 – :

Le plan complexe est rapporté à un repére orthonormé direct $(o, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considére les points A et B d'affixes respectives 2 et 3 ; à tous point M d'affixe $Z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{\overline{Z}-3}{\overline{Z}-2}$

1)Vérifier que $Z'-1 = \frac{1}{2-\overline{Z}}$. En déduire que $IM' \times AM = 1$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM'}) \equiv \pi[2\pi]$.

2)Construire le point M' lorsque M est un point du cercle ζ_1 de centre A et de rayon 1 .

3)Dans cette question le point M est un point du cercle ζ_2 de centre B et de rayon 1.

a)Montrer qu'il existe un réel α de $]-\pi,\pi[$ tel que $Z = 3+e^{i\alpha}$.

b)Ecrire Z'-1 sous forme exponentielle .

c)Montrer que M' appartient à la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$. construire alors le point M'.

Exercice – 3 – :

On considére dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : (\frac{Z+2i}{Z})^4 + 4 = 0$

1)Déteminer l'ensemble ζ des points M d'affixe Z tels que $|Z+2i| = \sqrt{2}|Z|$.

2) Montrer que si Z est une solution de (E) alors son point image $M \in \zeta$.

3)Resoudre dans C l'équation (E) . On donnera les solutions sous forme algébrique.

Exercice – 4 – :

1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^5 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) Dans la figure ci contre, on a représenter dans un repère orthonormé direct (O,u,v) le point A image d'une solution de

a)Construire tous les points images des solutions de (E)

b)Construire, dans le meme repère $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, les points images de racines de l'équation $Z^{15} = 1$

Exercice – 5 – :

Le plan complexe est rapporté au repére orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considére les points E et F d'affixes respectives 1 et i .On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de meme rayon 1 .
Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$, M le point d'affixe $1+e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1+e^{i\theta})$.

1)a)Calculer $\text{aff}(\overrightarrow{EM})$ et $\text{aff}(\overrightarrow{FN})$.

b)Montrer que lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$,M varie sur C_1 et N varie sur C_2 .

c)Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires .

2)Soit P le point d'affixe $Z_P = (1-i)\sin\theta . e^{i\theta}$.

a)Montrer que $\frac{\text{aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{\text{aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{aff}(\overrightarrow{FN})}$.

b)Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN) .

Lycée pilote de Bizerte	*Serie d'exercices n°5*	Prof M.Ben Ali
	4eme Math	

Exercice – 1 – :

Soit Z un nombre complexe different de 1 et θ un réel différent de $(2k+1)\pi$, $k \in Z$

1)Montrer que : $\frac{1+Z}{1-Z} = e^{i\theta}$ si et seulement si $Z = i\tan(\frac{\theta}{2})$.

2)Re*soudre* dans C l'équation $(\frac{1+Z}{1-Z})^3 = i$.

Exercice – 2 – :

Le plan complexe est rapporté à un repére orthonormé direct $(o,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.*On* considére les points A et B d'*affixes respectives* 2 et 3 ; à tous point M d'affixe $Z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{\overline{Z}-3}{\overline{Z}-2}$

1)*Vérifier* que $Z'-1 = \frac{1}{2-\overline{Z}}$. En déduire que $IM' \times AM = 1$ et $(\overline{\overrightarrow{AM}}, \overrightarrow{IM'}) = \pi[2\pi]$.

2)*Construire* le point M' lorsque M est un point du cercle ζ_1 de centre A et de rayon 1 .

3)Dans cette question le point M est un point du cercle ζ_2 de centre B et de rayon 1.

a)Montrer qu'il existe un réel α de $]-\pi,\pi[$ tel que $Z = 3+e^{i\alpha}$.

b)Ecrire Z'-1 sous forme exponentielle .

c)Montrer que M' appartient à la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$. construire alors le point M'.

Exercice – 3 – :

On considére dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : (\frac{Z+2i}{Z})^4 + 4 = 0$

1)*Déteminer* l'ensemble ζ des points M d'affixe Z tels que $|Z+2i| = \sqrt{2}|Z|$.

2) *Montrer* que si Z est une solution de (E) alors son point image $M \in \zeta$.

3)Re*soudre* dans C l'équation (E) . On donnera les solutions sous forme algébrique.

Exercice – 4 – :

1)*Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E) : Z^5 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) *Dans la figure ci contre, on a représenter dans un repère orthonormé direct* (O,u,v) *le point A image d'une solution de*

a)Construire tous les points images des solutions de (E)

b)Construire, dans le meme repère $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ *, les points images de racines de l'équation* $Z^{15} = 1$

Exercice – 5 – :

Le plan complexe est rapporté au repére orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.*On* considére les points E et F d'*affixes respectives* 1 et i .On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de meme rayon 1 . Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$, M le point d'affixe $1+e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1+e^{i\theta})$.

1)*a)Calculer* $\text{aff}(\overrightarrow{EM})$ et $\text{aff}(\overrightarrow{FN})$.

b)Montrer que lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$,M varie sur C_1 *et* N varie sur C_2 .

c)Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires .

2)Soit P le point d'affixe $Z_P = (1-i)\sin\theta . e^{i\theta}$.

a)Montrer que $\frac{\text{aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{\text{aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{aff}(\overrightarrow{FN})}$.

b)Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN) .

Exercice – 6 –:

On considére dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$, ou m est un nombre complexe.

1)Déterminer les valeurs de m pour les quelles i est une solution de (E) ,
puis déterminer l'autre solution.

2)a)Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).Soit z_1 *et* z_2 *les solutions.*

b)On pose $m=ie^{i\theta}$, $\theta \in \left]0,2\pi\right[$.

Déterminer le module et un argument de z_1 *et* z_2 .

3)*Dans* le plan complexe muni d'un R.O.N.D$(O,\vec{u},\vec{v})$ on considére les points A, M_1 *et* M_2 *d'affixes* respectives : $2i$, $m-i$ et $1-im$.

Déterminer la valeur de m pour laquelle on a : $\begin{cases} AM_2 = \sqrt{2}AM_1 \\ \overline{(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2})} \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

Exercice – 7 –:

On considére dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $2z^3-(1+5i)z^2-(5-i)z+2i=0$,

1)Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $2z^2-(1+3i)z-2=0$

2)a)Montrer que l'équation (E) admet dans $\mathbb{C}$, une solution imaginaire que l'on précisera.

b)Resoudre alors l'équation (E).

2)*Le* plan complexe muni d'un R.O.N.D$(O,\vec{u},\vec{v})$ on considére les points A et B *d'affixes* respectives : $z_A = 1+i$ et $z_B = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ .On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 1.

Donner les formes exponentielles de z_A *et* z_B.

3)Dans la suite ,M désigne un point de C d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0,2\pi]$.

•On considére l'application f , qui à tout point M de C associe $f(M)=MA \times MB$.

a)Montrer que pour tout réel α, $e^{2i\alpha} - 1 = 2i\sin\alpha e^{i\alpha}$.

b)Montrer que $f(M)=\left|e^{2i\alpha} - (\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i)e^{i\alpha}\right|$.

c)En déduire que $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+(2\sin\alpha - \frac{3}{2})^2}$.

4)*Montrer* qu'il existe deux points de C dont on donnera les affixes pour lesquelles f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.

5)Montrer qu'il existe un seul point de C dont on donnera l'affixe pour lequel f(M) est maximal. Donner cette valeur maximale

SERIE 1(4M)

EXERCICE 1 : *Le plan est muni d'un ROD* $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *Déterminer l'ensemble des points* $M(z)$ *dans les cas suivants*

1) $(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = 4a\overline{a}$ *(où* $a \in \mathbb{C}^*$ *)* *2)* $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$. *3)* $\left(z^2 + z - \overline{z}\right) \in i\mathbb{R}$.

4) $|2i\overline{z} - 1 + i| = |1 - 2z|$ *5)* $\dfrac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R}$

EXERCICE 2 : *Le plan est muni d'un ROD* $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *Soit* $I(1)$; $M(z)$ et $M'(z')$.

On pose $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$ *pour tout* $z \neq 1$.

1)Déterminer l'ensemble des points $M(z) / z' \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $z \neq 1$ *, on a :* $|z'| = 1$. *En déduire l'ensemble des points* $M'(z')$.

3) Montrer que : $\dfrac{z'-1}{1-z} \in \mathbb{R}$. *Que peut-on dire des points I , M et M' ?*

EXERCICE 3: *Le plan est muni d'un ROD* $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *, l'équation* $(E) : z^2 - 2i\overline{z} = 0$

2) *Soient O ,A , B et C les images dans le plan complexe P des solutions de (E) avec* $z_A \in i\mathbb{R}^*$, $\mathrm{Re}(z_B) \in \mathbb{R}_+^*$ *.Montrer que le triangle ABC est équilatéral . Déterminer une mesure de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)$.

So : $\{0 ; -2i ; \sqrt{3}+i ; -\sqrt{3}+i\}$

EXERCICE 4 : *Dans le plan est muni d'un ROD* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *; on considère les points* M_n *d'affixe* z_n *tel que* $z_0 = 8$ *et* $z_{n+1} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{4} z_n$

1) *a-Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe* $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$

   b- Calculer z_1, z_2 et z_3 *, puis placer les points* M_0, M_1, M_2 et M_3

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *calculer le rapport* $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$ *En déduire la nature du triangle* OM_nM_{n+1}

3) *a-Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :*

   $$z_n = \frac{8}{2^n}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

   b- Trouver les entiers naturels n pour que z_n *soit un réel .*

EXERCICE 5: *Le plan est rapporté à un repère orthonormé* $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A(i), B(-i) et le cercle ζ *de centre O et de rayon 1 .*

Soit $f : P/\{O\} \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{z^2-1}{2z}$$

1) Placer A , B et ζ sur une figure .

2) Montrer que f admet deux points invariants que l'on précisera .

3) a- Montrer que pour $z \in \mathbb{C}^*/\{i, -i\}$,on a : $\dfrac{z'+i}{z'-i} = \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2$.

b- Montrer alors que pour tout M distinct de O , A et de B , on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$.

c) En déduire que si $M \in \zeta/\{A,B\}$ alors $M' \in$ à un ensemble E que l'on précisera .

d) Montrer que pour tout point M distinct de O , A et B , on a : $\dfrac{M'A}{M'B} = \dfrac{MA^2}{MB^2}$

e- En déduire que si $M \in Med[AB]$ privée de O alors $M' \in$ à un ensemble F que l'on précisera .

<u>EXERCICE 6:</u> *Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère les points : A(i)et B(-i).*

Soit $f : P/\{A\} \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i}$$

1) *Montrer que l'ensemble des points invariants par f est un cercle à déterminer .*
2) *Montrer que les points A , M et M' sont alignés .*
3) *a- Montrer que pour tout point $M \in P - \{A,B\}$, on a :* $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$

   b- déduire que si $M \in \zeta_{[AB]} - \{A,B\}$, alors M' appartient à une droite que l'on déterminera .

   c- Déduire une construction de M' si $M \in \zeta_{[AB]} - \{A,B\}$.

$(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$

$- (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = +(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}})$